Комплексные числа

Мнимые и комплексные числа. Абсцисса и ордината комплексного числа. Сопряжённые комплексные числа. Операции с комплексными числами. Геометрическое представление комплексных чисел. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Операции с комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра.

Необходимость в этих числах нового типа появилась при решении квадратных уравнений для случая $D < 0$ (здесь D – дискриминант квадратного уравнения). Долгое время эти числа не находили физического применения, поэтому их и назвали «мнимыми» числами.

Комплексные числа записываются в виде: $a+bi$. Здесь a и b – *действительные числа*, а i – *мнимая единица, т.е.* $i^2 = -1$. Число a называется *абсциссой*, а b - *ординатой* комплексного числа $a+bi$. Два комплексных числа $a+bi$ и $a-bi$ называются *сопряжёнными* комплексными числами (напр. $2+5i$ и $2-5i$).

Основные договорённости:

1. Действительное число a может быть также записано в форме комплексного числа: $a+0\,i$ или $a-0\,i$. Например, записи $5+0\,i$ и $5-0\,i$ означают одно и то же число 5.
2. Комплексное число $0+bi$ называется *чисто мнимым числом*. Запись bi означает то же самое, что и $0+bi$.
3. Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ считаются равными, если $a=c$ и $b=d$. В противном случае комплексные числа не равны.

Сложение. Суммой комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число $(a+c)+(b+d)\,i$. Таким образом, *при сложении комплексных чисел отдельно складываются их абсциссы и ординаты.*

Это определение соответствует правилам действий с обычными многочленами.

П р и м е р : $(5+4i)+(3-2i)=(5+3)+(4i-2i)=8+2i$

Вычитание. Разностью двух комплексных чисел $a+bi$ (уменьшаемое) и $c+di$ (вычитаемое) называется комплексное число $(a-c)+(b-d)\,i$.

Таким образом, *при вычитании двух комплексных чисел отдельно вычитаются их абсциссы и ординаты.*

П р и м е р : $(5+2i)-(3+4i)=(5-3)+(2i-4i)=2-2i$

Умножение. Произведением комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число:

$(ac-bd)+(ad+bc)\,i$. Это определение вытекает из двух требований:

1) числа $a+bi$ и $c+di$ должны перемножаться, как алгебраические двучлены,

2) число i обладает основным свойством: $i^2=-1$.

П р и м е р : $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$. Следовательно, *произведение двух сопряжённых комплексных чисел равно действительному положительному числу.*

Деление. Разделить комплексное число $a+bi$ (делимое) на другое $c+di$ (делитель) - значит найти третье число $e+f\,i$ (чатное), которое будучи умноженным на делитель $c+di$, даёт в результате делимое $a+bi$.

Если делитель не равен нулю, деление всегда возможно.

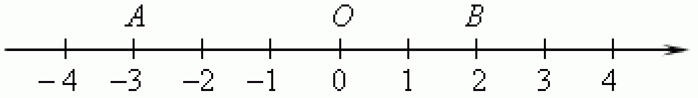
П р и м е р : Найти $(8+i):(2-3i)$.

Р е ш е н и е . Перепишем это отношение в виде дроби: $\dfrac{8+i}{2-3i}$.

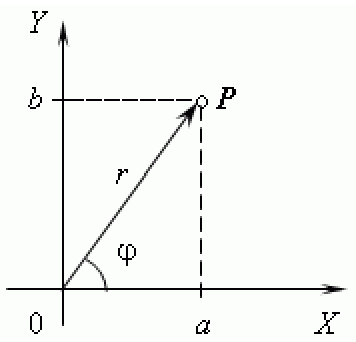
Умножив её числитель и знаменатель на $2+3i$ (число, сопряженное знаменателю) и выполнив все преобразования, получим:

$$\frac{(8+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{13+26i}{13} = 1+2i .$$

Геометрическое представление комплексных чисел. Действительные числа изображаются точками на числовой прямой:



Здесь точка *A* означает число –3, точка *B* – число 2, и O – ноль. В отличие от этого комплексные числа изображаются точками на координатной плоскости. Выберем для этого прямоугольные (декартовы) координаты с одинаковыми масштабами на обеих осях. Тогда комплексное число $a + bi$ будет представлено точкой P *с абсциссой a и ординатой b* (см. рис.). Эта система координат называется ***комплексной плоскостью***. ***Модулем*** комплексного числа называется длина вектора *OP*, изображающего комплексное число на координатной (*комплексной*) плоскости. Модуль комплексного числа $a + bi$ обозначается $|a + bi|$ или буквой r и равен:



$$r = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2} .$$

Сопряжённые комплексные числа имеют одинаковый модуль.

Аргумент *комплексного числа* - это угол φ между осью *OX* и вектором *OP*, изображающим это комплексное число. Отсюда, $\tan \varphi = b/a$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Абсциссу a и ординату *b* комплексного числа $a + bi$ можно выразить через его модуль r и аргумент φ:

$$a = r\cos\varphi , \quad b = r\sin\varphi .$$

Тогда

$$a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) .$$

Операции с комплексными числами, представленными в тригонометрической форме.

1. $z_1 \cdot z_2 = [r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)]\,[r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] =$

$$= r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)] .$$

2. $z_1 / z_2 = [r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] / [r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] =$

$$= r_1 / r_2 [\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)] .$$

3. $z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Это знаменитая *формула Муавра.*